**Informations** : 2 heures. Tous documents et calculatrices autorisés. Pas d'ordinateurs. Le barême est indiqué ; il y a 18 points auxquels s'ajouteront 2 points de soin.

**Question 1**
La formule d'intégration numérique (dite de Gauss-Hermite) à trois points est

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \exp^{-x^2}\ dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left(f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4\,f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

**a)** [3 points] Écrire (en langage d'algorithme et soigneusement) l'algorithme correspondant à cette formule ;

**b)** [3 points] Comment peut-on utiliser cet algorithme pour intégrer

$$\int_{0}^{\infty} x^2\ \exp^{-x^2/2}\ dx$$

quelle formule obtient-on ?

**Question 2**
Le système du type proies/prédateurs

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x\,(1-y/2) \\ \dfrac{dy}{dt} &= y\,(x/2-1) \end{cases}$$

est considéré.

**c)** [1 points] Quels sont les valeurs des couples $(x, y)$ pour lesquelles la solution de ce système est constante (i.e. ne dépend pas du temps) ?

**d)** [2 points] Écrire la formule de passage (juste la formule pas l'algorithme) d'un point $(x_0, y_0)$ au temps $t_0$ à un point $(x_1, y_1)$ au temps $t_1 = t_0 + h$ avec la méthode de Heun

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

pour le système proies/prédateurs. Il faut écrire les formules correspondant à ce système exactement et non pas une formule générale applicable à n'importe quel autre et il est inutile de rassembler les intermédiaires de calcul en une formule ne contenant plus que $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$).

**e)** [3 points] Écrire l'algorithme permettant le calcul numérique de la solution du système proies/prédateur (ce système et pas un système général) en utilisant la méthode emboîtée

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

et en acceptant une tolérance $\epsilon_x$ sur $x$ et $\epsilon_y$ sur $y$.

**f)** [2 points] Appliquée au système proies/prédateur, la méthode des séries à l'ordre 2 correspond à une formule de passage d'un point $(x_0, y_0)$ au temps $t_0$ à un point $(x_1, y_1)$ au temps $t_1 = t_0 + h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ puis $\ddot{x}_0$, $\ddot{y}_0$ en fonction de $x_0$ et $y_0$.

**Question 3**
Le système du type proies/prédateurs avec source (une intervention extérieure ajoute des proies périodiquement)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x\,(1-y/2) + \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} &= y\,(x/2-1) \end{cases}$$

est considéré.

**g)** [2 points] Mettre ce système sous forme autonome.

**Question 4**
L'équation différentielle ordinaire d'ordre 2 à conditions initiales (peu importe ce qu'elles valent)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{2}{x}\left(x - \frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + x\left(\frac{x}{2} - 1\right)\right)$$

est considérée.

**h)** [2 points] Mettre cette équation sous une forme propre à être traitée par une méthode Rung-Kutta.